

Colles de Maths - semaine 16 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit E un espace euclidien, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E autoadjoints, commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise tous les f_i .

Variante : En remplaçant autoadjoints par trigonalisables, montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui trigonalise tous les f_i .

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que tPAP ait tous ses termes diagonaux égaux.

Exercice 3 Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour toute valeur propre complexe λ de A , $|\lambda| < 1$. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive S telle que $S - AS^tA = B$.